

# Une Nouvelle Mesure pour le Problème de Minimisation de Largeur de Bande

Eduardo RODRIGUEZ-TELLO<sup>1</sup>, Jin-Kao HAO<sup>1</sup>, Jose TORRES-JIMENEZ<sup>2</sup>

1. LERIA, Université d'Angers, France

2. ITESM, Campus Cuernavaca, Mexique

{ertello, hao}@info.univ-angers.fr, jtj@itesm.mx

**Mots-clefs :** Graphes, Largeur de Bande, Recuit Simulé

## Résumé

Dans cet article, une nouvelle mesure, appelée  $\delta$ , pour le problème de minimisation de largeur de bande des graphes (PMLBG) est proposée. Elle tient compte de toutes les différences absolues entre les étiquettes de chaque paire de sommets reliés dans le graphe. Afin de valider la pertinence de  $\delta$ , un algorithme de Recuit Simulé intégrant cette mesure a été implémenté. Les résultats expérimentaux sont très satisfaisants en comparaison avec les meilleurs résultats connus.

## 1 Introduction

Le problème de minimisation de largeur de bande des graphes (PMLBG) est un problème NP-Complet [5]. Il a été proposé indépendamment par Harper [2] et Harary [1]. Le PMLBG peut être défini formellement comme suit : Soit un graphe non-orienté  $G = (V, E)$  composé d'un ensemble de sommets  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  et d'un ensemble d'arêtes  $E \subseteq V \times V$ . Soit  $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$  une permutation de  $V$ . La largeur de bande  $\beta$  de  $G$  pour  $\tau$  est :  $\beta_\tau(G) = \text{Max}\{|\tau_i - \tau_j| : (i, j) \in E\}$ . Le PMLBG consiste alors à déterminer une permutation  $\tau$  pour laquelle  $\beta_\tau(G)$  est minimum.

Le PMLBG a été trouvé très utile dans un grand nombre d'applications. Par exemple, dans la résolution de grands systèmes linéaires d'équations, l'élimination gaussienne peut être exécutée dans un temps  $O(n\beta^2)$  sur des matrices avec une largeur de bande  $\beta$ , qui est beaucoup plus rapide que l'algorithme normal en  $O(n^3)$  si  $\beta \ll n$ . D'autres applications incluent la conception de circuits et la cinétique chimique.

Il existe plusieurs algorithmes pour résoudre le PMLBG employant tous  $\beta$  comme mesure de qualité d'une solution. Dans ce travail, nous proposons une nouvelle mesure de qualité d'une solution. Cette nouvelle mesure, appelée  $\delta$ , tient compte même de la plus petite amélioration qui oriente la recherche vers de meilleures solutions, c'est-à-dire les solutions dans lesquelles toutes les différences absolues sont réduites au minimum.

Pour valider la pertinence de cette mesure  $\delta$ , nous avons implémenté un algorithme qui utilise  $\delta$  pour évaluer les solutions visitées. Nous comparons la performance de cet algorithme (RS- $\delta$ ) avec celle du même Recuit Simulé qui utilise la mesure classique  $\beta$  (RS- $\beta$ ). Nous comparons également l'algorithme RS- $\delta$  avec trois autres heuristiques bien connues de la littérature : Recherche Tabou (RT) [4], GRASP-PR [6], et Algorithme Génétique avec Hill Climbing (AG-HC) [3].

## 2 Résultats Expérimentaux

Les expérimentations ont été réalisées sur deux séries de test de la collection Harwell-Boeing (33 instances pour la première série et 80 pour la deuxième)<sup>1</sup>. Les critères utilisés sont identiques à ceux utilisés

---

<sup>1</sup><http://math.nist.gov/MatrixMarket/data/Harwell-Boeing>

dans la littérature : la largeur de bande moyenne et le temps moyen d'exécution en secondes. Due la nature non déterministe de la méthode 20 expériences ont été exécutées pour chacun des instances. Tous les résultats rapportés ici correspondent à la moyenne.

Nous pouvons observer dans le Tableau 1 que la meilleure qualité de solution est obtenue par RS- $\delta$  pour les deux jeux de test. Il est capable d'obtenir 101/113 meilleures solutions connues tandis que GA-HC a obtenu seulement 48 des meilleures solutions. Ces résultats sont possibles grâce à l'utilisation de la nouvelle mesure  $\delta$ .

TAB. 1 – Comparaison des performances par rapport à la taille des problèmes.

33 instances avec $n = 30, \dots, 199$					
	RT	GRASP-PR	AG-HC	RS- $\beta$	RS- $\delta$
<b>Moyenne <math>\beta</math></b>	23.33	22.52	22.67	29.36	22.03
<b>Ecart-type</b>	9.63%	2.47%	5.66%	56.50%	0.45%
<b>Temps</b>	2.36	4.21	2.54	1434.97	11.18
80 instances avec $n = 200, \dots, 1000$					
	RT	GRASP-PR	AG-HC	RS- $\beta$	RS- $\delta$
<b>Moyenne <math>\beta</math></b>	100.78	99.43	97.05	164.59	94.80
<b>Ecart-type</b>	11.77%	6.59%	6.22%	222.32%	1.14%
<b>Temps</b>	121.66	323.19	85.22	1800.00	199.25

### 3 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté la mesure  $\delta$  pour le PMLBG. Pour valider l'utilité pratique de  $\delta$ , un algorithme de Recuit Simulé (RS- $\delta$ ) a été mis en application. La qualité de l'algorithme RS- $\delta$  a été validée en utilisant un ensemble d'instances de la collection Harwell-Boeing. Notre approche a été capable de trouver 101/113 meilleures solutions connues, et surpasse ainsi les autres heuristiques de l'état de l'art. Finalement, notons que la mesure  $\delta$  proposée dans cet article peut être employée par d'autres algorithmes metaheuristiques (Recherche de Tabu, Algorithmes Génétiques) pour améliorer leur performances. Plus généralement, nous pensons que la recherche de nouvelles fonctions d'évaluation pour des problèmes combinatoires est une matière très importante, parce qu'elle permet d'améliorer la puissance de recherche des metaheuristiques.

**Remerciements.** Ce travail a été partiellement financé par le Ministère National de la Science et de la Technologie de Mexique (CONACYT).

### Références

- [1] F. Harary, "Theory of Graphs and its Applications", Czechoslovak Academy of Science, Prague, page 161, 1967.
- [2] L.H. Harper, "Optimal assignment of numbers to vertices", Journal SIAM vol. 12, pages 131-135, 1964.
- [3] A. Lim, B. Rodrigues, F. Xiao, "An Evolutionary Approach to Bandwidth Minimization", Congress on Evolutionary Computation (CEC 2003, Canberra-Australia), 2003.
- [4] R. Martí, M. Laguna, F. Glover and V. Campos, "Reducing the Bandwidth of a Sparse Matrix with Tabu Search", European Journal of Operational Research, vol. 135, no. 2, pages 211-220, 2001.
- [5] C.H. Papadimitriou, "The NP-Completeness of the Bandwidth Minimization Problem", Journal of Computing, vol. 16, pages 263-270, 1976.
- [6] Estefanía Piñana, Isaac Plana, Vicente Campos and Rafael Martí, "GRASP and Path Relinking for the Matrix Bandwidth Minimization", European Journal of Operational Research, vol. 153, issue 1, pages 200-210, 2004.